3.4　函数的单调性和极值

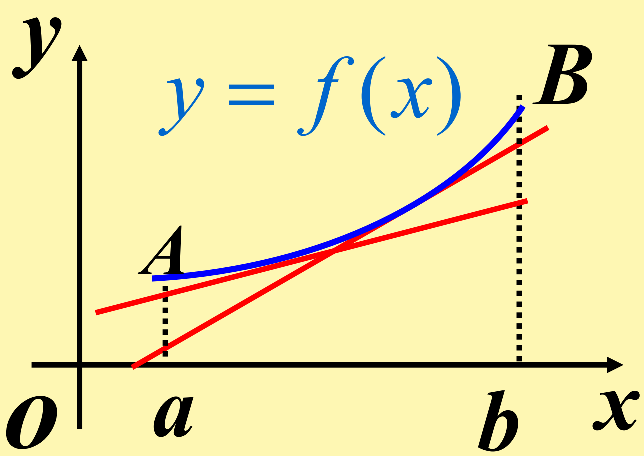
3.4.1 函数单调性的判定法

3.4.2 函数的极值及其求法

3.4.3 最大值与最小值问题

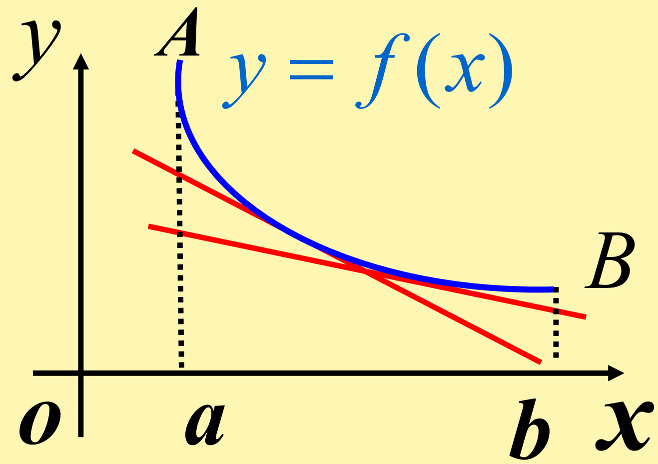
3.4.1 函数单调性的判定法

如图所示



单调递增

曲线上各点处的切线斜率是非负的



单调递减

曲线上各点处的切线斜率是非正的

定理 3.4.1 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导,若 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, 则 $f(x)$ 在 I 内单调递增（递减）.

证明 不妨设 $f'(x)>0$, $x\in I$, 任取 $x_1,x_2\in I$ $(x_1<x_2)$

由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad>0$$

$$\xi\in(x_1,x_2)\subset I$$

故 $f(x_1)<f(x_2)$. 这说明 $f(x)$在 I 内单调递增.

证毕

例1 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

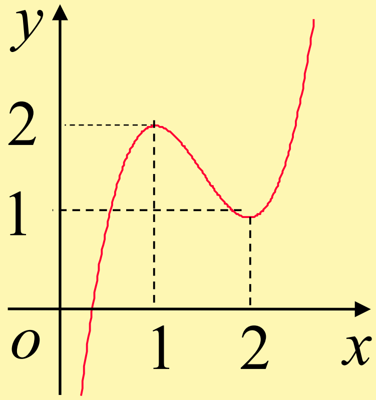
令 $f'(x)=0$, 得 $x=1, x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

故 $f(x)$ 的**单调增**区间为 $(-\infty,1]$, $[2,+\infty)$;

$f(x)$的**单调减**区间为 $[1,2]$.

不能写成 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$;



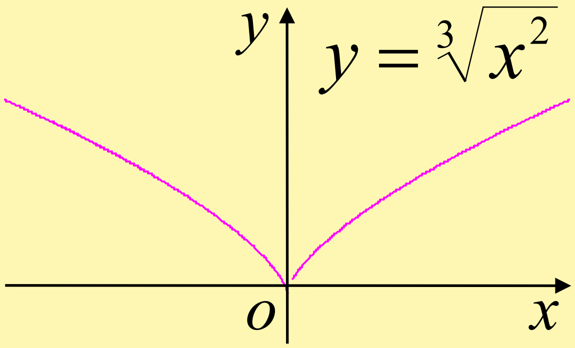
注

(1) 单调区间的分界点除驻点外, 也可是导数不存在的点.

例如, $y=\sqrt[3]{x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'\big|_{x=0}=\infty$$

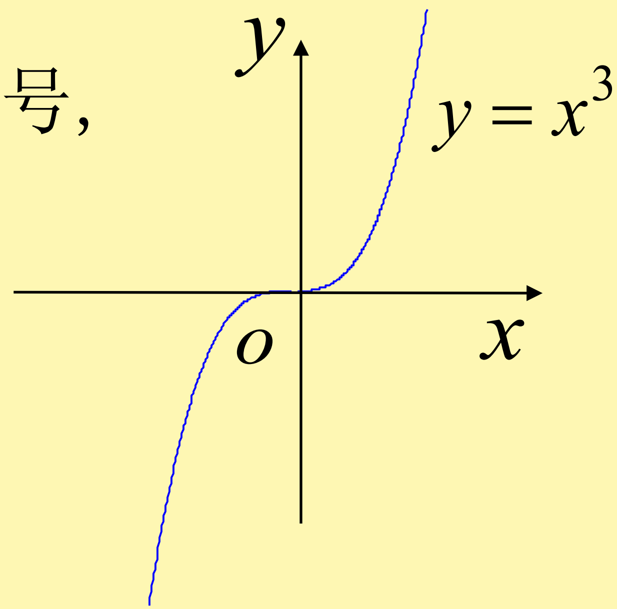


(2) 如果函数在某驻点两边导数同号, 则不改变函数的单调性 .

例如, $y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=3x^2$$

$$y'\big|_{x=0}=0$$



讨论函数的单调性可按下列步骤进行:

（1） 确定连续函数 $y=f(x)$ 的定义域;

（2） 求出 $f'(x)$,用方程 $f'(x)=0$ 的点及 $f'(x)$ 不存在的点,

将定义域划分成若干子区间;

（3） 判断 $f'(x)$ 在每个区间内的符号,就可以确定

出函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

例2 证明 $x>0$ 时, 成立不等式 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$

证明 令 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

在$(0,+\infty)$内 $f'(x)>0$,

因此$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，从而当$x>0$时$f(x)>f(0)$,

而 $f(0)=0$, 故 $f(x)>f(0)=0$, 即$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot(1+\xi)^{-\frac{1}{2}}x^2$$

例. 讨论方程$\ln x-\dfrac{x}{e}+k=0(k>0)$有几个实根.

解 令$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ $\quad D:(0,+\infty)$.

令$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=0$, 得$x=e$

$f(x)$在$(0,e)$单调增，在$(e,+\infty)$单调减

$f(e)=k>0$, $\quad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{e}+\frac{k}{x}\right)=-\infty$$

$f(x)$在$(0,e),(e,+\infty)$上各有一零点。

即方程$f(x)=0$在$(0,e),(e,+\infty)$上各有一个实根.

思考：若去掉条件$k>0$，结果如何？

4、利用单调性结合零点定理可以研究方程根（函数的零点）的个数及范围

方法 (1) 先求出连续函数$f(x)$的单调区间。

(2) 判别每个单调区间的端点的函数值（或极限）的符号。

(3) 根据零点定理（推广的零点定理）：若两端点的值（或极限）一正一负，则在此区间内有唯一零点，其余则无零点。

注： 零点定理的推广

$$\text{设} f(x)\in C(a,b), \quad \lim_{x\to a^+} f(x)\cdot \lim_{x\to b^-} f(x)<0$$

$$\text{则至少}\exists \xi\in(a,b), \ \text{使得}\ f(\xi)=0$$

3.4.2 函数的极值及其求法

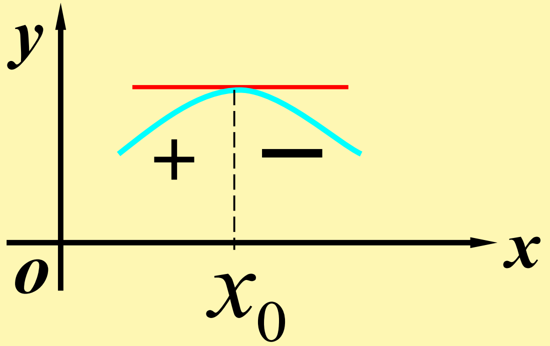
定理 3.4.2（第一充分条件）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续，且在去心邻域内有导数.

(1) 如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，

而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，

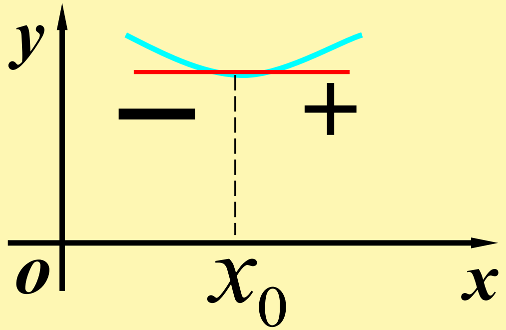
则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值。



(2) 如果 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，

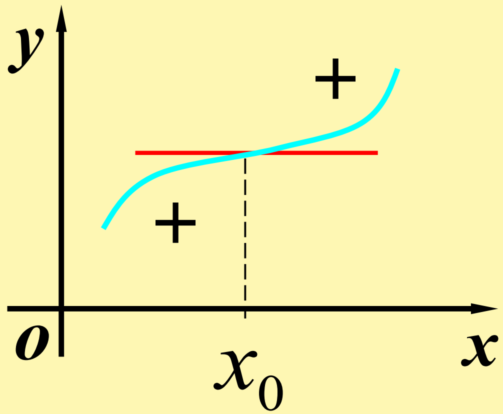
而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，

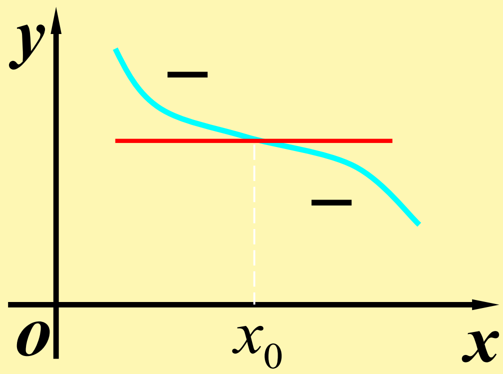
则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值。



(3) 如果 $x \in U^0(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，

则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处没有极值。





求极值的步骤:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求出方程 $f'(x)=0$ 的点和$f'\left(x\right)$不存在的点;

(3) 检查 $f'(x)$ 在驻点或不可导点的左右正负号,

若异号，判断是极大值还是极小值;

(4) 求极值.

例3求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值．

解 1）求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2）求极值可疑点

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{2}{5}$；导数不存在的点：$x_2=0$

3）列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$	$\nearrow$

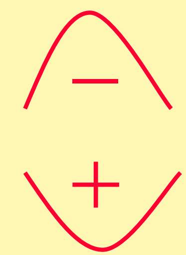
$\therefore x=0$ 是极大点，其极大值为 $f(0)=0$

$x=\frac{2}{5}$ 是极小点，其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$

定理3.4.3(第二充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值.

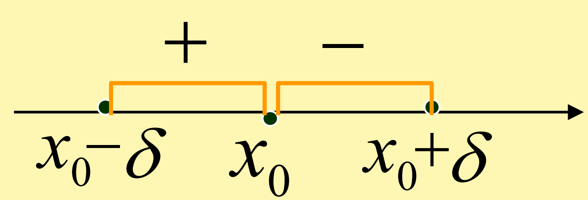


证：(1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)<0$，



由第一判别法知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证.

例4 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解 1）求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2,\qquad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2）求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$

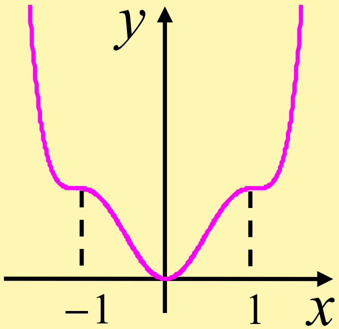
3）判别

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(0)=0$ 为极小值 ；

又 $f''(-1)=f''(1)=0$，故需用第一判别法判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号，

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值.



例6 （隐函数的极值）设 $a>0$，求由方程 $x^3+y-3axy=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 在 $x>0$内的极值点.

解　在隐函数两边对x求导，并解出y'得

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{3ay-3x^2}{1-3ax} \quad (1)$$

令$\frac{dy}{dx}=0$，得$y=\frac{1}{a}x^2$，代入原隐函数方程，得$\frac{1}{a}x^2=2x^3$　(2)

因$x>0$，故由式(2)中解出隐函数的驻点$x=\frac{1}{2a}$，

再在式(1)两边对x求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3ay'-6x)(1-3ax)-(3ay-3x^2)(-3a)}{(1-3ax)^2} \quad (3)$$

因$x=\dfrac{1}{2a}$时，$y=\dfrac{1}{4a^3}$及$y'=0$，将它们代入式(3)，得

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2a}}=\frac{6}{a}>0$$

所以$x=\dfrac{1}{2a}$是$x^3+y-3axy=0$所确定的隐函数$y=f(x)$的极小点.

$$x^3+y-3axy=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3ay'-6x)(1-3ax)-(3ay-3x^2)(-3a)}{(1-3ax)^2}$$

例7（参数方程所表示的函数的极值）求由参数方程

$x=\frac{1}{4}(t+1)^2, y=\frac{1}{4}(t-1)^2$（其中$t>0$）所确定的$y=f(x)$的极值.

解　由于 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}(t-1)}{\frac{1}{2}(t+1)}=\frac{t-1}{t+1}$$

因此,当$t=1$时,$\frac{dy}{dx}=0$, 此时$x=1; y=0$

又因为 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4}{(t+1)^3}$$

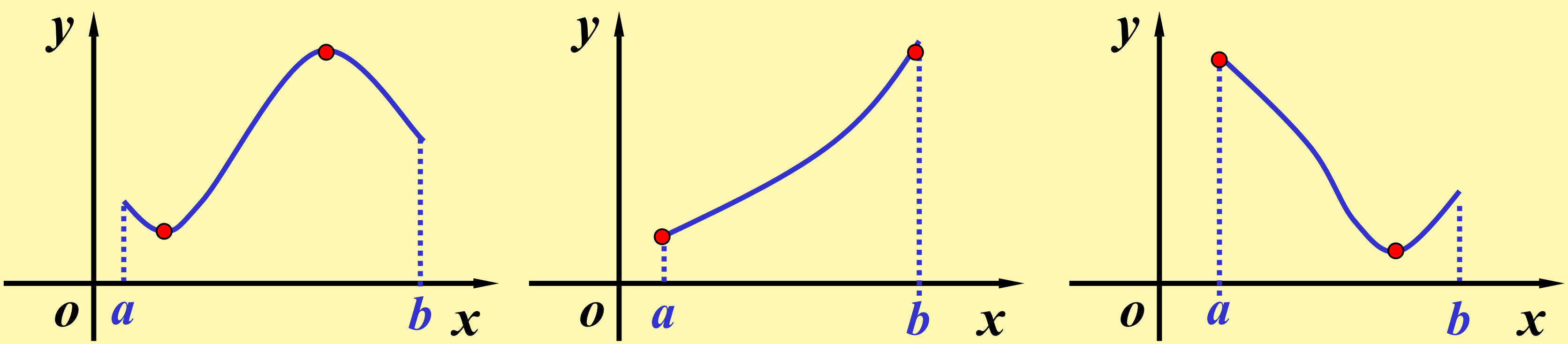
所以 $$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=\left.\frac{4}{(t+1)^3}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}>0$$

于是$x=1$是所给函数的极小值点,极小值为$y=0$.

3.4.3 最大值与最小值问题

情形1: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值存在.

若除个别点外处处可导，并且至多只有有限个导数为零的点，则最值点应到端点、驻点、不可导点中去找。



因此求出区间端点及驻点和不可导点的函数值,比较大小, 哪个大哪个就是最大值,哪个小哪个就是最小值;

例8 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值 .

解 显然 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 连续，且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$f(\frac{-1}{4})=3\frac{19}{32}$， $f(0)=0, f(1)=5$， $f(2)=4$， $f(\frac{5}{2})=5$

故函数在 $x=0$ 取最小值 0; 在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 取最大值 5.

情形2: 当$f(x)$在区间内可导且只有一个极值驻点时,

若在此点取极大（小）值,则它也是最大（小）值 .

在应用类题型中往往会遇到这种情形.

情形3: 在应用问题中, 往往根据问题的性质就可以判断$f(x)$确有最大值或最小值, 而且一定在定义区间内部取得, 这时如果函数 $f(x)$在区间内部只有一个驻点 x_0时, 就可以判定$f(x_0)$是最大值或最小值.

例10 求抛物线 $y^2=2px$ 上一点,使之与点 $M(p,p)$ 的距离最短.

解 设 (x,y) 为抛物线上任意一点,则点 (x,y) 与点 M 的距离为

$$d=\sqrt{(x-p)^2+(y-p)^2}$$

为计算方便,可设函数 $f(x)=d^2=(x-p)^2+(y-p)^2$,

其中 $y^2=2px$, 则 $f'(x)=2(x-p)+2(y-p)y'$,

因 $2yy'=2p$, 将 $y'=\dfrac{p}{y}$ 代入 $f'(x)$ 的表达式,得

$$f'(x)=2(x-p)+2(y-p)\frac{p}{y}=2\left(x-\frac{p^2}{y}\right)$$

令$f'(x)=0$,求得$xy=p^2$, 又$y^2=2px$

所以 $x=\dfrac{p}{\sqrt[3]{2}}$　　$y=\sqrt[3]{2}p$

根据问题的实际背景,所求问题有最短距离且$f(x)$存在唯一驻点, 故当$x=\dfrac{p}{\sqrt[3]{2}}$, $y=\sqrt[3]{2}p$时, $f(x)$最小,

即距离d最短.

$y^2=2px$　$f'(x)=2\left(x-\dfrac{p^2}{y}\right)$

小结

1. 可导函数单调性判别

$f'(x) > 0, x \in I$ ⟶ $f(x)$ 在 I 上单调递增

$f'(x) < 0, x \in I$ ⟶ $f(x)$ 在 I 上单调递减

2. 连续函数的极值

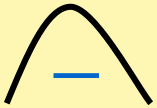
(1) 极值可疑点 :使导数为0 或不存在的点

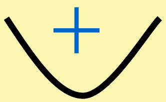
(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 x_0 由**正变负** ⟶ $f(x_0)$ 为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由**负变正** ⟶ $f(x_0)$ 为极小值

(3) 第二充分条件

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)\text{为极大值}$$ 

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)\text{为极小值}$$ 

3. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找 ;

应用题可根据问题的实际意义判别 .

(1)建立目标函数并确定定义域;

(2)求最值;

若目标函数只有唯一驻点，则该点的函数值即为所求的最大（或最小）值.